

1. 用消解来证明如下公式是不可满足的：

$$\bullet (p \leftrightarrow \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$$

$$p \leftrightarrow \neg p \equiv \neg p \wedge p$$

$$\text{则原式} \equiv (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge \neg q)$$

得到四个子句 $\{\neg p \vee q, \neg p \vee \neg q, p \vee q, p \vee \neg q\}$

消解前两个子句得到 $\{\neg p\}$

消解后两个子句得到 $\{p\}$

消解得到 $\{\}$

所以原式不可满足

$$\bullet (p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$$

分解等价式为多个蕴含式，转换为析取后得到子句：

$$\{\neg p \vee \neg q \vee r\}, \{p \vee q\}, \{p \vee \neg r\}, \{\neg p \vee q\}, \{\neg q \vee p\}, \{\neg p \vee \neg r\}, \{p \vee r\}$$

消解 $\{p \vee q\}$ 和 $\{\neg p \vee q\}$ 得到 $\{q\}$

消解 $\{p \vee \neg r\}$ 和 $\{\neg p \vee \neg r\}$ 得到 $\{\neg r\}$

消解 $\{p \vee r\}$ 和 $\{\neg r\}$ 得到 $\{p\}$

消解 $\{q\}$ 和 $\{\neg q \vee p\}$ 得到 $\{p\}$

消解 $\{p\}$ 和 $\{\neg p \vee \neg r\}$ 得到 $\{\neg r\}$

最终消解 $\{p\}$ 和 $\{\neg p\}$ （来自其他步骤）得到空子句

所以原式不可满足

$$\bullet \neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$$

$$\equiv \neg(((\neg p \vee q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$$

$$\equiv \neg((\neg(\neg p \vee q) \vee \neg q) \rightarrow \neg q)$$

$$\equiv \neg(p \vee \neg q)$$

$$\equiv \neg p \wedge q$$

子句集合为 $\{\neg p, q\}$

因此原式可以满足， p 为假， q 为真

2. 判断下列子句集合的可满足性。对于可满足的，给出真假赋值；对于不可满足的，说明原因：

$$\bullet \{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}$$

▸ p 假 q 真即可满足

$$\bullet \{\{\neg p\}, \{p, \neg q\}, \{q\}\}$$

▸ 消解得到空子句，不可满足

$$\bullet \{\{p\}, \{\}\}$$

▸ 含有空子句，不可满足

$$\bullet \{\{\}\}$$

▸ 本身是空子句，不可满足

3. 设 S 是子句集合，用 $R(S)$ 表示 S 的消解闭包，即：如果 $c \in S$ ，则 $c \in R(S)$ ；如果 $c_1, c_2 \in R(S)$ ，且 c 是 c_1 和 c_2 的消解，则 $c \in R(S)$ 。当 S 为如下的子句集合时，求出 $R(S)$ ：

- $\{[p, \neg q], [p, q], [\neg p]\}$
 - $\{[p, \neg q], [p, q], [\neg p], [p], [q], [\neg q], []\}$
- $\{[p], [q], [p, q]\}$
 - $\{[p], [q], [p, q]\}$