人工智能逻辑 课后练习 6 2025/03/25

专业：人工智能

学号 + 姓名：3230105892 高玮轩

1. 把下列公式变换为前束范式：

   1. $\exists x_1 F(y, x_1) \leftrightarrow \forall x_2 G(x_2)$
      $\equiv (\exists x_1 F(y, x_1) \to \forall x_2 G(x_2)) \land (\forall x_2 G(x_2) \to \exists x_1 F(y, x_1))$
      $\equiv (\neg\exists x_1 F(y, x_1) \lor \forall x_2 G(x_2)) \land (\neg\forall x_2 G(x_2) \lor \exists x_1 F(y, x_1))$
      $\equiv (\forall x_1 \neg F(y, x_1) \lor \forall x_2 G(x_2)) \land (\exists x_2 \neg G(x_2) \lor \exists x_1 F(y, x_1))$
      $\equiv (\forall x_1 \forall x_2 (\neg F(y, x_1) \lor G(x_2))) \land (\exists x_2 \exists x_1 (\neg G(x_2) \lor F(y, x_1))))$
      将上述存在量词后的 x_1, x_2 重命名为 $x_3, x_4 := \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 ((\neg F(y, x_1) \lor G(x_2)) \land (\neg G(x_2) \lor F(y, x_1)))$
   2. $\forall \mathrm{x}_1(\mathrm{F}(\mathrm{x}_1) \to \exists \mathrm{x}_2(\mathrm{G}(\mathrm{x}_2) \to \mathrm{F}(\mathrm{x}_1) \lor \forall x_3 \mathrm{G}(\mathrm{x}_3)))$
      $\equiv \forall x_1 (\neg F(x_1) \lor \exists x_2 (\neg G(x_2) \lor F(x_1) \lor \forall x_3 G(x_3)))$
      $\equiv \forall x_1 (\neg F(x_1) \lor \exists x_2 \neg G(x_2) \lor F(x_1) \lor \forall x_3 G(x_3)))$
      $\equiv \exists x_2 \neg G(x_2) \land \forall x_3 G(x_3)$
      $\equiv \mathrm{False}$

2. 本题涉及如何用一阶逻辑来形式化数学中群的特性。给定一个二元函数 f 和一个对象 e，集合 G 是一个群，当且仅当：

   - f 满足结合律；
   - e 是 f 的单位元，即对于任意 x，f(e,x) = f(x,e) = x；
   - 每个元素都有一个逆元，即对于任意 x，都存在 i，使得 f(x,i) = f(i,x) = e。
     - (1) 用含有两个非逻辑符号 f 和对象 e 的一阶逻辑语言来形式化上述三个句子；
       - 结合律：$\forall x \forall y \forall z f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$
       - 单位元：$\forall x (f(e, x) = f(x, e) = x)$
       - 逆元：$\forall x \exists z (f(x, z) = f(z, x) = e)$
     - (2) 利用逻辑解释来证明上述句子在逻辑上蕴含群的如下特性：对于任意 x 和 y，存在 z 使得 f(x,z) = y；
       - 由于逆元存在，$\forall x \exists i (f(x, i) = f(i, x) = e)$
       - $\forall y$ 定义 $z = f(i, y)$
       - 则 $f(x, z) = f(x, f(i, y)) = f(f(x, i), y) = f(e, y) = y$
     - (3) 请说明在上一步证明中如何把 z 的值表示为 x 和 y 的函数。
       - 即定义的 $z = f(i, y)$
       - 其中 i 为 x 的逆元

3. 假设我相信下列每句话：

   - 龙是存在的。
   - 龙不是在洞里睡觉，就是在树林里猎食。
   - 如果龙饿了，那么它不能够睡觉。
   - 如果龙累了，那么它不能够猎食。

把上述句子翻译为一阶公式。使用消解来回答如下问题：

- 论域 $D =$ 全体龙

- 龙是存在的：$\exists d$
- $\forall x(\mathrm{SleepInCave}(x) \vee \mathrm{Hunt}(x))$
- $\forall x(\mathrm{Hungry}(x) \rightarrow \neg\ \mathrm{SleepInCave}(x)) \equiv \forall x(\neg\ \mathrm{Hungry}(x) \vee \neg\ \mathrm{SleepInCave}(x)$
- $\forall x(\mathrm{Tired}(x) \rightarrow \neg\ \mathrm{Hunt}(x)) \equiv \forall x(\neg\ \mathrm{Tired}(x) \vee \neg\ \mathrm{Hunt}(x))$

在下面两题中，先实例化 $\exists d$，再使用消解。

- (1) 当龙饿的时候，它做什么？
  - 加入 $\neg\ \mathrm{Hunt}(d)$，（由于不涉及累不累，不考虑最后一句）则有子句集合 $\{\neg\ \mathrm{Hunt}(d), [\mathrm{SleepInCave}(d), \mathrm{Hunt}(d)], [\neg\ \mathrm{Hungry}(d), \neg\ \mathrm{SleepInCave}(d)], \mathrm{Hungry}(d)\}$
  - 发现消解后得到空子句，说明 $\mathrm{Hunt}(d)$，即龙饿的时候，它会猎食
- (2) 当龙累的时候，它做什么？
  - 加入 $\neg\ \mathrm{SleepInCave}(d)$，（由于不涉及饿不饿，不考虑第三句）则有子句集合 $\{\neg\ \mathrm{SleepInCave}(d), [\mathrm{SleepInCave}(d), \mathrm{Hunt}(d)], [\neg\ \mathrm{Tired}(d), \neg\ \mathrm{Hunt}(d)], \mathrm{Tired}(d)\}$
  - 发现消解后得到空子句，说明 $\mathrm{SleepInCave}(d)$，即龙累的时候，它会睡觉